



## Analýza a ověření kvality replikace benchmarku metodologií Tracking Error

Jiří VALECKÝ, VŠB-TU Ostrava<sup>i</sup>

### Abstract

*The aim of the paper is to perform an analysis and compare the accuracy of a benchmark replication using various replication methods of Tracking Error methodology. On the historical data and under the existence of the proportional transactions costs, we verify the impact of stocks number in portfolio and transaction costs on the selected replication methods of passive and active asset management strategies, namely replication with daily and controlled restructuring and the method with penalization of transaction costs. We also determined which selected replication method is the most precise in the sense of benchmark replication and we give several general recommendations for benchmark replication strategy including the eligible proportion of replicating portfolio on the market capitalization with respect to the target replication accuracy. Firstly, the Tracking Error methodology and its application in asset management are presented and optimization problem of particular replication methods is formulated in the next part of the paper. In the application part, the replication accuracy is analyzed and the quality of benchmark replication is verified on the Czech index PX-GLOB during the period of the year 2007. It emerged during our experiment that under the condition of passive asset management strategy the replicating portfolios with the proportion of the market capitalization on the benchmark at the level 70 – 85 % give very good results. Moreover we conclude that the method with penalization of transaction costs is the most precise replication method from the selected and analyzed methods of active assets management strategy.*

### Keywords

*Benchmark, replication, restructuring, tracking error, transaction costs.*

**JEL Classification:** G11, C60

<sup>i</sup> Department of Finance, Faculty of Economics, VŠB-Technical University of Ostrava, Sokolská tř. 33, 701 21 Ostrava, Czech Republic.

[jiri.valecky@vsb.cz](mailto:jiri.valecky@vsb.cz)

This research is due to the support provided by GAČR (Czech Science Foundation – Grantová Agentura České Republiky) under the project No. 402/08/1234.

### 1. Úvod

Výkonnost řízených investičních portfolií je srovnávána mezi sebou, ale také ve vztahu ke zvolenému vzoru – benchmarku. Některá tato portfolia jsou řízena za účelem, aby očekávaný výnos byl shodný právě s výnosem zvoleného vzoru (např. indexové fondy), zatímco jiná jsou řízena tak, aby generovala požadovaný dodatečný výnos (*nadvýnos*), a to s minimálními transakčními náklady a s nepatrnou odchylkou (*Tracking Error*) od vývoje benchmarku.

K řízení takovýchto portfolií lze uplatnit metodologii Tracking Error, jejímž primárním cílem je přiblížit vývoj hodnoty (výnosu) portfolia k vývoji hodnoty (výnosu) zvoleného benchmarku, jímž může být vybraný tržní index nebo jiné portfolio finančních aktiv, a to při minimální hodnotě Tracking Error. Smyslem této metodologie je tedy vytvoření a správa portfolia takovým způsobem, aby výsledná *chyba* Tracking Error byla buď minimální, nebo splňovala stanovený maximální limit. Tuto metodologii lze využít např. ke snížení objemu transakčních nákladů,

ke snížení celkového rizika portfolia, nebo pomocí ní lze snížit relativní riziko ve vztahu ke zvolenému benchmarku (tzv. replikace).

Faktory, jež obecně determinují úspěšnost replikace, jsou zejména následující: (1) existence transakčních nákladů, (2) báze replikačního portfolia, (3) výše dodatečného výnosu, (4) výchozí struktura replikačního portfolia, (5) kvalita predikce a další. Analýzami vlivů vybraných faktorů se zabývali Walsh a kol. (1998), El-Hassan a Kofman (2003), Valecký (2008a, 2008b, 2008c), a další.

Tyto optimalizační úlohy jsou řešeny pomocí stochastického programování, například Gaivoronski a kol. (1995), avšak nalézt tato řešení je velmi obtížné již pro malý počet rozhodovacích období. Úlohy s vyšším počtem období jsou řešeny za předpokladu, že v každém období je k dispozici nová tržní informace, která umožňuje investorovi pružně reagovat na změnu tržních podmínek a zaujmout novou strategii, viz například Gaivoronski a Stella (2003) nebo Gaivoronski a kol. (2005). Další výhodou tohoto přístupu je ta, že zde není nutnou podmínkou předpoklad o pravděpodobnostním rozdělení nových tržních informací.

Tracking Error (rovněž také aktivní riziko – *active risk*) lze tedy charakterizovat jako míru odchylky portfolia od benchmarku. Rudolf a kol. (1999) definuje Tracking Error (dále *TE*) jako střední hodnotu absolutní odchylky (*Mean Absolute Deviation*) výnosu řízeného portfolia a benchmarku:

$$TE_{MAD} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| R_{p,t} - B_t \right|, \quad (1)$$

kde  $R_{p,t}$  a  $B_t$  je výnos portfolia a benchmarku v čase  $t$  a  $T$  je počet pozorování.

Další chápání termínu Tracking Error je v podobě kořenu střední hodnoty čtvercové odchylky (*Root Mean Squared Deviation*) výnosu řízeného portfolia od benchmarku, například Gaivoronski a Stella (2000, 2003), tedy

$$TE_{RMSD} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{p,t} - B_t)^2}. \quad (2)$$

Poslední definice Tracking Error, jež je často zaměňována s předchozí, je v podobě směrodatné odchylky (*Standard Deviation*) rozdílu výnosu portfolia a benchmarku, například v Roll (1992) a Jorion (2002, 2003):

$$TE_{SD} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - E(X_t))^2}, \quad (3)$$

kde  $X_t = R_{p,t} - B_t$ . Dále Frino a Gallagher (2001) definovali hodnotu *TE* také jako směrodatnou odchylku reziduí regrese:

$$R_{p,t} = \alpha + \beta B_t + e_t. \quad (4)$$

Cílem tohoto příspěvku je provést numerický experiment za účelem analýzy úspěšnosti replikace indexu českého kapitálového trhu PX-GLOB za období roku 2007 pomocí metody pasivní replikace, replikace s denní a s řízenou restrukturalizací a replikace s penalizací transakčních nákladů a výsledky jednotlivých metod porovnat. Proto je benchmark replikován za předpokladu znalosti budoucnosti i dalších vstupních parametrů, neboť pouze tak lze získat výsledky, jež nejsou zkresleny neznámými faktory (přesnost predikce, volba parametrů modelu apod.). Dílčím cílem je poté ověřit vliv velikosti báze a proporcionálních transakčních nákladů na kvalitu replikace.

V následující druhé části jsou představeny a formulovány analyzované replikační metody. V části třetí jsou jednotlivé replikační strategie aplikovány na český index kapitálového trhu PX-GLOB. Získané výsledky jsou zhodnoceny a interpretovány v poslední, čtvrté části.

## 2. Replikace benchmarku dle metodologie Tracking Error

K replikaci zvoleného benchmarku dle metodologie Tracking Error je možné použít celou řadu replikačních metod spadajících do kategorie aktivní či pasivní správy. Pasivní správa se liší od aktivní tím, že nejsou povoleny zásahy do struktury portfolia, jinými slovy nejsou povoleny případné restrukturalizace portfolia. Je tedy zřejmé, že aktivní správa je mnohem flexibilnější a umožňuje snáze splnit zvolené cíle. Na druhou stranu je však náročnější z hlediska praktické proveditelnosti, neboť je nutné nalézt optimální strukturu portfolia v každém okamžiku, v němž je provedena restrukturalizace. Značnou nevýhodou jsou zde transakční poplatky, jež musí být hrazeny a jež snižují výnos portfolia. Úlohy řešící tyto problémy se od sebe liší použitou účelovou funkcí a vedou k matematickému vícestupňovému programování – jejich přehled lze nalézt např. v Gaivoronski a kol. (2005).

Nyní definujeme dynamickou strukturu portfolia drženého pasivní a aktivní správou za předpokladu jednotkového bohatství. Mějme vektor struktury portfolia v čase  $t$  a  $t-1$ ,  $\mathbf{x}_t^P$  a  $\mathbf{x}_{t-1}^P$ , dále vektor struktury portfolia v čase  $t$ ,  $\mathbf{z}_t^P$ , jež představuje aktualizovanou strukturu portfolia vlivem pohybu cen aktiv dle

$$z_{i,t}^P = \frac{(1 + R_{i,t}) x_{i,t-1}^P}{\sum_{k=1}^N (1 + R_{k,t}) x_{k,t-1}^P}, \text{ pro } i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

kde  $x_{i,t-1}^P$ ,  $x_{i,t}^P$  je podíl  $i$ -tého aktiva v portfoliu v čase  $t-1$  a  $t$ ,  $R_{i,t}$  je výnos  $i$ -tého aktiva v čase  $t$  a  $N$  je počet cenných papírů v portfoliu.

U aktivní správy jsou dále prováděny nákupy (prodeje) finančních aktiv obsažených ve struktuře portfolia, proto struktura portfolia v čase  $t$ ,  $\mathbf{x}_t^P$ , se spočítá jako

$$x_{i,t}^P = z_{i,t}^P + x_{i,t+}^P - x_{i,t-}^P, \text{ pro } i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

kde  $z_{i,t}^P$  je relativní podíl  $i$ -tého aktiva v řízeném portfoliu v důsledku pohybu cen aktiv (5),  $x_{i,t+}^P$  je relativní podíl koupených a  $x_{i,t-}^P$  je relativní podíl prodaných aktiv a  $x_{i,t}^P$  je konečný relativní podíl  $i$ -tého aktiva v čase  $t$ . Pro portfolio držené pasivní správou platí rovnice  $x_{i,t}^P = z_{i,t}^P$  pro  $t = 1, \dots, T$ .

## 2.1 Pasivní replikace

Obecnou optimalizační úlohu replikace, jež je prováděna pasivní správou portfolia, lze zapsat pomocí následující úlohy smíšeného celočíselného programování.

**Úloha 1** (pasivní správa)

$$\min_{\mathbf{x}^P, \mathbf{d}} TE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t' \mathbf{x}^P - B_t)^2},$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^N x_i^P = 1, \quad (P1)$$

$$x_i^P \geq 0, \text{ pro } i = 1, \dots, N, \quad (P2)$$

$$\mathbf{1}' \mathbf{d} = S, \quad (P3)$$

$$x_i^P \leq d_i, \quad d_i \in \{0, 1\}, \text{ pro } i = 1, \dots, N, \quad (P4)$$

kde  $\mathbf{1}$  je jednotkový vektor,  $S$  je maximální počet finančních aktiv použitých k replikaci,  $\mathbf{x}^P$  je vektor relativních podílů portfolia,  $B_t$  je výnos benchmarku a  $\mathbf{R}_t$  je vektor výnosů finančních aktiv v čase  $t$ . Vektor binárních proměnných  $\mathbf{d}$  zde určuje zahrnutí ( $d_i = 1$ ) či nezahrnutí ( $d_i = 0$ ) aktiva do portfolia,

Účelovou funkcí je nalezen takový vektor  $\mathbf{x}^P$ , jenž minimalizuje hodnotu Tracking Error dle (2) za podmínky investování celého bohatství (P1) a nemožnosti krátkých prodejů (P2). Podmínkou (P3) je určen maximální počet finančních aktiv použitých pro replikaci a skupinou podmínek (P4) je zajištěno, že není-li aktivum zahrnuto do báze ( $d_i = 0$ ), je relativní podíl aktiva v bázi nulový.

## 2.2 Replikace s denní restrukturalizací

Další charakterizované metody replikace spadají do kategorie aktivní správy. První z nich je replikace s denní restrukturalizací, jež za předpokladu existence proporcionálních transakčních nákladů  $\varphi$  definujeme jako následující optimalizační úlohu dle Gaivoronski a Stella (2003) a Gaivoronski a kol. (2005), vyjádřenou pomocí výnosů a s počátečním výběrem aktiv pro replikaci v následujícím tvaru.

**Úloha 2** (aktivní správa – denní restrukturalizace)

$$\min_{\mathbf{x}_t^P, \mathbf{d}} \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{p,t} - B_t)^2},$$

za podmínek

$$\mathbf{1}' \mathbf{x}_t^P = 1, \text{ pro } t = 1, \dots, T, \quad (P1)$$

$$x_{i,t}^P \geq 0, \text{ pro } i = 1, \dots, N, \text{ pro } t = 1, \dots, T, \quad (P2)$$

$$\mathbf{1}' \mathbf{d} = S, \quad (P3)$$

$$x_{i,t}^P \leq d_i, \quad d_i \in \{0, 1\}, \text{ pro } i = 1, \dots, N, \quad (P4)$$

kde

$$R_{p,t} = (1 - u_t) \left( 1 + \mathbf{R}_t' \mathbf{x}_t^P \right) - 1, \quad t = 1, \dots, T, \quad (R1)$$

$$u_t = \varphi \cdot \sum_{i=1}^N |x_{i,t}^P - z_{i,t}^P|, \quad t = 1, \dots, T, \quad (R2)$$

$$z_{i,t}^P = \frac{(1 + R_{i,t}) x_{i,t-1}^P}{\sum_{k=1}^N (1 + R_{k,t}) x_{k,t-1}^P}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (R3)$$

Účelová funkce minimalizuje Tracking Error za podmínky investování celého bohatství (P1) a nemožnosti krátkých prodejů (P2). Podmínkou (P3) je určen maximální počet finančních aktiv použitých pro replikaci a skupinou podmínek (P4) je zajištěno, že není-li aktivum zahrnuto do báze ( $d_i = 0$ ), je relativní podíl aktiva v bázi nulový.

Rovnicí (R1) je spočten výnos portfolia  $R_{p,t}$  snížený o část výnosu odčerpaného proporcionálními transakčními náklady. Rovnicí (R2) je vyjádřen podíl proporcionálních transakčních nákladů  $u_t$  na jednotkovém bohatství a rovnice (R3) představuje přepočtený podíl  $i$ -tého aktiva v portfoliu z důvodu pohybu cen aktiv.

## 2.3 Replikace s řízenou restrukturalizací

Další replikační metodou aktivní správy je replikace s řízenou restrukturalizací vycházející opět z Gaivoronski a Stella (2003) a Gaivoronski a kol. (2005). Tato metoda omezuje výši transakčních nákladů tak, že je přepínáno mezi režimy aktivní a pasivní správy dle zvoleného pravidla.

Postup je následující. Nejprve je dopočtena hodnota Tracking Error bez provedení restrukturalizace, tedy

za předpokladu výchozích vah  $\mathbf{x}_{t-1}^P$  z předchozího období dle

$$TE' = \sqrt{\left(\mathbf{R}_t' \mathbf{z}_t^P - B_t\right)^2}, \quad (7)$$

kde  $\mathbf{z}_t^P$  je přepočtená struktura  $\mathbf{x}_{t-1}^P$  dle rovnice (5). V dalším kroku je pomocí optimalizační Úlohy 2 nalezena optimální struktura,  $\mathbf{x}_t^P$ , hodnota účelové funkce  $TE$  je porovnávána s hodnotou  $TE'$  z rovnice (7), a zda dojde k přepnutí režimu do aktivní správy, je posléze rozhodnuto dle pravidla

$$\mathbf{x}_t^P = \begin{cases} \mathbf{x}_t^P & \text{pokud } TE > TE' + \Delta, \\ \mathbf{z}_t^P & \text{v jiném případě,} \end{cases} \quad (8)$$

kde  $\Delta$  je prahová proměnná.

Stěžejní problém této metody spočívá v nalezení prahové proměnné, která je pro replikaci za dané období optimální. Toto lze řešit buď optimalizační úlohou, viz Gaivoronski a kol. (2005), nebo simulačními technikami, pomocí nichž se pro vygenerovanou množinu prahových proměnných simuluje replikace dle postupu popsaného výše a pro konečný počet prahových veličin se hledá ta prahová veličina, při které je replikace nejúspěšnější, tedy hodnota Tracking Error nejnižší.

Gaivoronski a Stella (2003) uvedli zjednodušující algoritmus omezující počet simulací, který simuluje replikace pouze pro prahové proměnné nalezené na historických datech. Množina potenciálních prahových hodnot z historických dat se získá dle

$$\Delta_t = TE_t - TE_t' \text{ pro } t = 1, \dots, T, \quad (9)$$

a pro takto získané veličiny  $\Delta_t$  je replikace simulována.

Velmi dobré výsledky jsou taktéž získány, použijeli se optimální prahová proměnná z předchozího období, viz například Valecký (2008a).

## 2.4 Replikace s penalizací transakčních nákladů

Další, poslední prezentovanou metodou replikace je replikace s penalizací transakčních nákladů, jejíž základy lze nalézt v Derigs a Nickel (2004). Optimalizační úlohu lze formulovat následovně.

**Úloha 3** (aktivní správa – penalizace transakčních nákladů)

$$\min_{\mathbf{x}_t^P} \sqrt{\frac{1}{T} \left(\mathbf{R}_t' \mathbf{z}_t^P - B_t\right)^2} + \lambda \cdot U,$$

za podmínky

$$\mathbf{1}' \mathbf{x}_t^P = 1, \text{ pro } t = 1, \dots, T, \quad (P1)$$

$$x_{i,t}^P \geq 0, \text{ pro } i = 1, \dots, N, \text{ pro } t = 1, \dots, T, \quad (P2)$$

$$\mathbf{1}' \mathbf{d} = S, \quad (P3)$$

$$x_{i,t}^P \leq d_i, \quad d_i \in \{0, 1\}, \text{ pro } i = 1, \dots, N, \quad (P4)$$

kde

$$R_{p,t} = (1 - u_t) \left(1 + \mathbf{R}_t' \mathbf{x}_t^P\right) - 1, \text{ pro } t = 1, \dots, T, \quad (R1)$$

$$U = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \varphi \left| x_{i,t}^P - z_{i,t}^P \right|, \quad (R2)$$

$$z_{i,t}^P = \frac{(1 + R_{i,t}) x_{i,t-1}^P}{\sum_{k=1}^N (1 + R_{k,t}) x_{k,t-1}^P}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (R3)$$

Účelová funkce minimalizuje hodnotu  $TE$  zvýšenou o součin penalizačního parametru  $\lambda$  a podíl celkových proporcionalních transakčních nákladů  $U$ . Podmínky (P1) až (P4) a rovnice (R1) až (R3) jsou totožné s Úlohou 2.

## 3. Analýza a ověření replikačních metod

V této části je proveden numerický experiment, jehož cílem je srovnání přesnosti jednotlivých replikačních strategií, a to replikací pasivní správou a dále metodami aktivní správy (replikace s denní a s řízenou restrukturalizací, replikace s penalizací transakčních nákladů) dle optimalizačních úloh popsaných ve druhé části. Analyzována je úspěšnost replikace českého indexu kapitálového trhu PX-GLOB v roce 2007 pomocí 9 portfolií a je ověřen vliv velikosti báze a proporcionalních transakčních nákladů na kvalitu replikace dle jednotlivých metod.

Nejprve je provedena pasivní strategie replikace, jejímž výsledkem je struktura 9 portfolií, jež jsou optimálními pro pasivní správu při minimální  $TE$ . Tato portfolia jsou dále použita jako výchozí pro správu aktivní.

Vstupní data<sup>1</sup> obsahují diskretní denní výnosy indexu PX-GLOB a dalších 26 cenných papírů, jež byly obchodovány po celý rok 2007 v režimu KOBOS na BCPP, a. s., a jež tvořily v roce 2007 bázi indexu PX-GLOB.<sup>2</sup>

### 3.1 Replikace pasivní správou

První analyzovanou metodou replikace je replikace pasivní správou. Za tímto účelem byla řešena Úloha 1 metodou větví a mezí (*branch and cut method*) pro 9 portfolií o velikosti  $S$  cenných papírů, přičemž

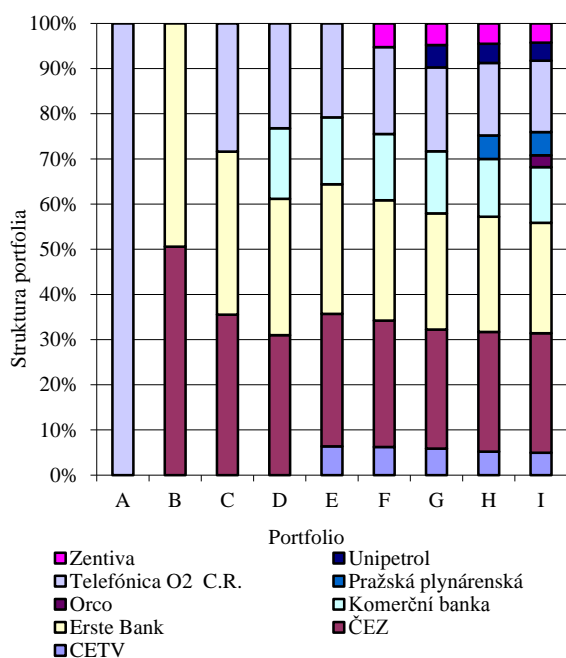
<sup>1</sup> Data byla poskytnuta společností Patria Finance ([www.patria.cz](http://www.patria.cz)).

<sup>2</sup> Množina aktiv se skládala z 31 cenných papírů, jež byly součástí báze indexu v roce 2007. Z tohoto počtu bylo vyřazeno pět aktiv, která se v průběhu roku přestala obchodovat.



$S \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . K tomuto výpočtu byl použit software CPLEX. Výsledná složení optimálních replikačních portfolií jsou znázorněna na obrázku 1.

Z obrázku 1 lze vyčíst, že Portfolio A je tvořeno jedním cenným papírem (akcie Telefónica O2 C. R.), Portfolio B dvěma cennými papíry (akcie ČEZ a Erste bank) atd. Dále je zřejmé, že některé cenné papíry jsou pro replikaci vhodnější než jiné, viz níže. Např. akcie Erste bank jsou zařazeny do báze replikačního portfolia při použití pouze dvou cenných papírů a jsou dále součástí i ostatních replikačních portfolií se zvyšující se bází, a to až do velikosti 9 finančních aktiv.



**Obrázek 1** Struktura replikačních portfolií pasivní správy

Následující tabulky představují řazení finančních aktiv dle koeficientu korelace výnosu tohoto aktiva a výnosu benchmarku, dále řazení dle podílu tržní kapitalizace na benchmarku, tedy na indexu PX-GLOB.

Jsou-li spojeny údaje z těchto tabulek a z obrázku 1, představující strukturu jednotlivých portfolií tak, jak byla vybírána, lze z těchto formulovat závěr, že cenné papíry jsou zařazovány do replikačního portfolia dle podílu tržní kapitalizace na indexu a nikoliv dle koeficientu korelace, jak by se mohlo předpokládat.

**Tabulka 3** Charakteristiky replikace pasivní správou

	Portfolio								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Tracking Error	1,03%	0,49%	0,30%	0,20%	0,17%	0,13%	0,11%	0,10%	0,09%
Podíl na tržní kapitalizaci	15,34%	51,06%	66,40%	78,05%	83,06%	87,42%	91,48%	91,86%	94,07%
Koeficient korelace	0,5574	0,9507	0,9643	0,9839	0,9888	0,9928	0,9948	0,9954	0,9962

**Tabulka 1** Řazení aktiv dle koeficientu korelace

Pořadové č.	Název	Koeficient korelace
1	ČEZ	0,7945
2	Erste bank	0,7598
3	Komerční banka	0,6392
4	Unipetrol	0,6247
5	Orco	0,6059
6	Telefónica O2 C.R.	0,5574
7	Zentiva	0,4972
8	CETV	0,4806
9	Pražská plynárenská	0,0550

**Tabulka 2** Řazení aktiv dle podílu na tržní kapitalizaci

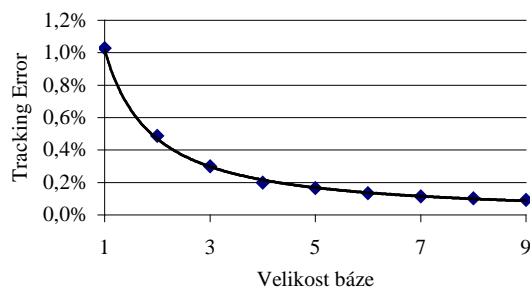
Pořadové č.	Název	Podíl na tržní kapitalizaci
1	ČEZ	27,86%
2	Erste bank	23,20%
3	Telefónica O2 C.R.	15,34%
4	Komerční banka	11,65%
5	CETV	5,01%
6	Zentiva	4,36%
7	Unipetrol	4,06%
8	Orco	2,21%
9	Pražská plynárenská	0,38%

V následující tabulce 3 jsou uvedeny hodnoty Tracking Error spolu s dopočtenými podíly portfolia na tržní kapitalizaci indexu. Uvedeny jsou zde taktéž koeficienty korelace výnosu benchmarku a výnosu replikačního portfolia.

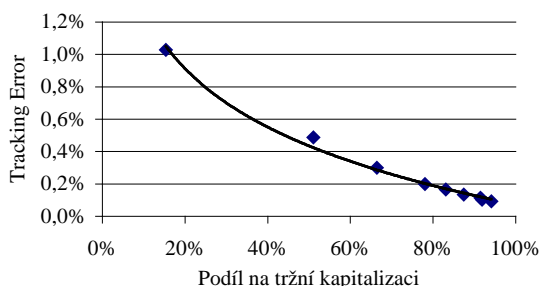
Dle těchto výsledků lze konstatovat, že úspěšnost replikace roste spolu s rostoucí velikostí báze replikačního portfolia. Vysoké úspěšnosti bylo dosaženo již u Portfolia D (4 cenné papíry v bázi), Tracking Error je ve výši 0,199 % a koeficient korelace velmi blízký jedné, 0,9839. Závislosti přesnosti replikace (hodnoty *TE*) na velikost báze a na velikost podílu tržní kapitalizace indexu jsou zachyceny na obrázku 2 a 3.

Dle následujících obrázků lze konstatovat, že hodnota *TE* klesá jak s růstem velikosti báze replikačního portfolia, tak i se zvyšujícím se podílem tržní kapitalizace, a to v obou případech mocným trendem (trend poklesu vztahu *TE* a podílu tržní kapitalizace lze však velmi dobře nahradit také trendem lineárním).

Na základě získaných výsledků (tabulka 3 a obrázky 2 a 3) lze říci, že pro kvalitní replikaci indexu PX-GLOB stačí použít portfolio obsahující 50 % až 70 % tržní kapitalizace (portfolia B a C o třech až čtyřech



**Obrázek 2** Vztah Tracking Error a velikosti báze replikačního portfolia



**Obrázek 3** Vztah Tracking Error a velikosti podílu na tržní kapitalizaci indexu

aktivech), pro velmi přesnou replikaci je vhodné použít 70 % až 85 % tržní kapitalizace (portfolia D a E o pěti až šesti aktivech) a u portfolií s podílem na kapitalizaci nad 85 % (portfolia F až I o sedmi a více aktivech) je růst přesnosti replikace minimální.

### 3.2 Replikace s denní restrukturalizací

Další aplikovanou metodou replikace je replikace aktivní správou s denními restrukturalizacemi dle Úlohy 2 pro různou hladinu transakčních nákladů.

Vzhledem k tomu, že řešení této úlohy je velmi obtížné, rozhodli jsme o struktuře (o zařazení cenného papíru do portfolia) tak, že jsme převzali optimální portfolia A až I z pasivní správy. Předpokládáme tak, že jsou-li tato portfolia optimální pro pasivní správu, je nutné provést minimum zásahu i při správě aktivní. Úloha je poté řešena tak, že v každém období  $t$  je získána nová informace z období  $t+1$ , jež umožňuje manažerovi reagovat a zaujmout novou optimální pozici (novou strukturu) tak, aby minimalizoval hodnotu  $TE$  za sledované období. Podmínky (P3) a (P4) tedy nejsou součástí optimalizační úlohy, neboť výběr aktiv byl převzat z pasivní správy. Celý numerický experiment byl proveden prostřednictvím softwaru Matlab.

V následující tabulce 4 jsou uvedeny výsledné hodnoty  $TE$  pro jednotlivá portfolia a úroveň transakčních nákladů ve výši 0 %; 0,2 %; 0,4 %; 0,6 %; 0,8 % a 1 %. Pro možnost srovnání jsou v tabulce uvedeny i hodnoty Tracking Error pro pasivní správu.

Z uvedených výsledků lze konstatovat, že aktivní správa je úspěšnější, a tedy se vyplatí u portfolií B, C, D, E a F, u kterých lze denní zásahy do struktury doporučit až do výše transakčních nákladů 0,4 %, a u portfolií G, H a I je aktivní správa výhodnější do výše 0,2 % (šedá políčka). Naproti tomu pasivní správa je výhodnější u portfolií B, C, D, E a F za předpokladu transakčních nákladů 0,6 % a vyšších a u portfolií G, H a I pro 0,4 % a více. U portfolia A nemá aktivní správa smysl, neboť toto portfolio se skládá pouze z jednoho cenného papíru, a proto aktivní zásahy do struktury nejsou možné.

Dále poznamenejme, že pro nulové transakční náklady je replikace pomocí portfolií D až I přesná (nulové hodnoty Tracking Error), neboť restrukturalizace jsou prováděny pomocí dostatečného množství aktiv a bez neexistence transakčních nákladů, které by odčerpávaly část výnosu portfolia.

### 3.3 Replikace s řízenou restrukturalizací

Druhou analyzovanou replikací aktivní správy je metoda s řízenou restrukturalizací. Replikace byla provedena stejně jako v části 3.2 tak, že byla opět převzata optimální portfolia pasivní správy jako výchozí pozice a v každém období byla spočtena odchylka  $TE$  po zaujetí nové optimální pozice a tato porovnána s  $TE'$ , kterou by manažer realizoval při zachování pozice původní. To, zda je přepnuto do aktivního režimu, nebo je setrváno v režimu pasivní správy, je rozhodnuto dle pravidla (8), které porovnává hodnotu účelové funkce Úlohy 2 ( $TE_t$ ) s hodnotou  $TE'_t$  dle (7), kde  $z_t^p$  je přepočtená struktura (5), přičemž prahová proměnná  $\Delta$  udává absolutní míru tolerance, při jak vysoké hodnotě  $TE_t$  je již přepnuto do aktivního režimu.

Stěžejní problém však spočívá v nalezení této prahové proměnné, která je pro replikaci za dané období optimální. Toto bylo řešeno pomocí zjednodušeného algoritmu simulace dle Gaivoronski a Stella (2003), viz část 2.3.

Optimální prahové proměnné a výsledné hodnoty  $TE$  pro dané portfolio a pro danou výši transakčních nákladů jsou uvedeny v tabulce 5 a 6.

Dle výsledků uvedených v tabulce 6 je zřejmé, že hodnota  $TE$  replikace aktivní správou s řízenou restrukturalizací konverguje s růstem transakčních nákladů k hodnotě  $TE$  získané správou pasivní. Tento závěr je odůvodnitelný i prostou úvahou, neboť rostou-li transakční náklady natolik, že je nevýhodné provádět aktivní zásahy do jeho struktury, stává se výhodnější správa pasivní. Ovšem pro určitou výši transakčních nákladů má stále smysl u některých portfolií aktivní politiku provádět. Např. pro portfolio B a C je aktivní správa efektivní i pro výši transakč-

ních nákladů 1 %, kdežto u portfolia H a I má aktivní správa smysl pouze do výše transakčních poplatků 0,4 %.

Stejně jako u replikace s denní restrukturalizací (viz výše) je replikace řízenou restrukturalizací přesná pro nulové transakční náklady u portfolií D až I, a to ze stejného důvodu, neboť je replikace provedena pomocí dostatečného množství aktiv a při nulových transakčních nákladech, které by odčerpávaly část výnosu portfolia.

### 3.4 Replikace s penalizační funkcí transakčních nákladů

Další replikace je provedena pomocí Úlohy 3, a to stejnými principy jako replikace s denní restrukturalizací, tj. že za výchozí portfolia byla brána optimální portfolia z pasivní strategie a těmito byla provedena replikace tak, že manažer měl v každém období  $t$  k dispozici novou informaci z období následujícího. Na tuto informaci měl poté možnost reagovat a nalézt novou optimální pozici tak, aby hodnota  $TE$  za celé sledované období byla minimální.

Zde je stěžejní problém ve stanovení výše penalizačního parametru  $\lambda$ . Pro získání

srovnatelných výsledků byla provedena úplná enumerace replikací všech portfolií pro všechny výše transakčních nákladů s cílem nalézt optimální výši tohoto koeficientu z množiny  $\lambda \in \{0,1\}$  s velikostí kroku 0,01. Výsledné optimální hodnoty parametru jsou uvedeny v následující tabulce 7.

V další tabulce 8 jsou uvedeny výsledky replikací pro optimální výši penalizačních koeficientů.

Při nulových transakčních nákladech jsou výsledky replikací totožné s metodou replikace s denní restrukturalizací, neboť účelová funkce degeneruje v účelovou funkci Úlohy 2. Srovnání, která metoda je při replikaci efektivnější, má tedy smysl pouze tehdy, jsou-li respektovány transakční náklady.

Dle výsledků je zřejmé, že replikace pomocí této metody je velmi úspěšná, úspěšnější než ostatní metody včetně pasivní správy. Výsledky replikace portfoliem A (jeden cenný papír) a ostatními portfolii za neexistence transakčních nákladů jsou shodné s výsledky části 3.2, neboť i zde platí maximální přesnost replikace při neexistenci transakčních nákladů u portfolií D až I.

**Tabulka 4** Výsledné hodnoty  $TE$  replikace s denní restrukturalizací [%]

Správa	Transakční náklady [%]	Portfolio								
		A	B	C	D	E	F	G	H	I
aktivní	0,0	1,028	0,175	0,042	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,2	1,028	0,254	0,125	0,075	0,062	0,054	0,060	0,057	0,056
	0,4	1,028	0,389	0,239	0,151	0,125	0,109	0,119	0,115	0,112
	0,6	1,028	0,540	0,356	0,226	0,187	0,163	0,179	0,172	0,168
	0,8	1,028	0,697	0,473	0,301	0,250	0,217	0,239	0,229	0,225
	1,0	1,028	0,856	0,590	0,376	0,312	0,271	0,299	0,287	0,281
pasivní	–	1,028	0,487	0,301	0,199	0,166	0,133	0,114	0,102	0,093

**Tabulka 5** Optimální prahové proměnné pro jednotlivá portfolia a úroveň transakčních nákladů [%]

Transakční náklady [%]	Portfolio								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0,0	–	1,980	0,037	0,101	0,045	0,128	0,181	0,228	0,000
0,2	–	1,980	0,047	0,101	0,045	0,128	0,198	0,228	0,000
0,4	–	1,980	0,037	0,101	0,045	0,396	0,181	0,228	0,065
0,6	–	1,980	0,047	0,101	0,434	0,136	0,207	0,365	0,000
0,8	–	1,980	0,037	0,101	0,652	0,236	0,413	0,365	0,037
1,0	–	1,980	0,387	0,538	0,434	0,169	0,413	0,940	0,000

**Tabulka 6** Výsledné hodnoty  $TE$  replikace s řízenou restrukturalizací [%]

Správa	Transakční náklady [%]	Portfolio								
		A	B	C	D	E	F	G	H	I
aktivní	0,0	1,028	0,174	0,042	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,2	1,028	0,243	0,122	0,080	0,062	0,054	0,056	0,057	0,056
	0,4	1,028	0,354	0,188	0,135	0,119	0,106	0,104	0,095	0,089
	0,6	1,028	0,399	0,228	0,163	0,160	0,129	0,112	0,101	0,092
	0,8	1,028	0,428	0,255	0,179	0,161	0,130	0,113	0,102	0,093
	1,0	1,028	0,472	0,280	0,192	0,161	0,132	0,114	0,102	0,093
pasivní	–	1,028	0,487	0,301	0,199	0,166	0,133	0,114	0,102	0,093

#### 4. Závěr

Cílem příspěvku bylo srovnat přesnost replikace benchmarku dle vybraných metod pasivní a aktivní správy. Z tohoto důvodu byly všechny replikace provedeny za plné znalosti vývoje i dalších vstupních parametrů. Nejprve byla představena metodologie Tracking Error a byly formulovány optimalizační úlohy jednotlivých replikačních metod. V aplikační části byla na replikaci českého indexu kapitálového trhu PX-GLOB za rok 2007 analyzována a ověřena úspěšnost replikace dle těchto metod za existence proporcionálních nákladů. Rovněž byl ověřen vliv transakčních nákladů a velikostí báze replikačního portfolia na kvalitu replikace.

Při konstrukci replikačních portfolií bylo zjištěno, že finanční aktiva jsou do replikačního portfolia vybírána dle podílu tržní kapitalizace na benchmarku (od nejvyššího po nejnižší) a ne podle korelace jejich výnosu s výnosem benchmarku.<sup>3</sup> Výjimku zde tvoří akcie Pražské plynárenské zařazené do portfolia G až I z důvodu nedostatečné přesnosti výpočetního programu.<sup>4</sup>

Vliv velikosti báze a výše transakčních nákladů na kvalitu replikace je u všech metod stejný, a to, že s rostoucí bází přesnost replikace roste a s rostoucími transakčními náklady naopak klesá. Pouze u řízené restrukturalizace hodnota *TE* roste pouze k určité hranici, neboť ta vždy konverguje k optimální pasivní strategii.

Jsou-li analyzované metody srovnány mezi sebou, jako nejúspěšnější na historických datech se ukázala replikace s penalizací transakčních nákladů, replikace s řízenou restrukturalizací a replikace pasivní správou. Metodu s denní restrukturalizací nelze prakticky vůbec doporučit, neboť ta nezohledňuje výši transakčních poplatků a je efektivní pouze za jejich neexistence nebo při jejich velmi malé výši.

Pro replikaci tržního indexu PX-GLOB pasivní správou lze doporučit, aby k replikaci byla použita ta finanční aktiva, jež mají nejvyšší podíl na tržní kapitalizaci benchmarku, neboť jen tak jsou tato replikační portfolia efektivní. Pokud není struktura replikovaného benchmarku známa, je nutné provést volbu aktiv dle optimalizační úlohy celočíselného programování. Dle získaných výsledků však lze říci, že pro kvalitní replikaci stačí použít portfolio obsahující aktiva s 50 až 70 % tržní kapitalizace, dále pro velmi přesnou

replikaci stačí použít aktiva s celkovou tržní kapitalizací 70 až 85 % a pro portfolia s podílem na kapitalizaci nad 85 % je rozdíl v přesnosti replikace minimální.

#### Literatura

DERIGS, U., NICKEL, N.-H. (2004). On a Local Search Heuristic for a Class of Tracking Error Minimization Problems in Portfolio Management. *Annals of Operations Research* 131: 45–77.

<http://dx.doi.org/10.1023/B:ANOR.0000039512.98833.5a>

EL-HASSAN, N., KOFMAN, P. (2003). Tracking Error and Active Portfolio Management. *Australian Journal of Management* 28: 183–207.

<http://dx.doi.org/10.1177/031289620302800204>

FRINO, A., GALLAGHER, D.R. (2001). Tracking S&P 500 Index Funds. *Journal of Portfolio Management* 28: 44–55.

<http://dx.doi.org/10.3905/jpm.2001.319822>

GAIVORONSKI, A.A., KRYLOV, S., VAN DER WIJST, N. (2005). Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. *European Journal of Operational Research* 163: 115–131.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2003.12.001>

GAIVORONSKI, A.A., MESSINA, E., SCIOMACHEN, A. (1995). A statistical generalized programming algorithm for stochastic optimization problems. *Annals of Operations Research* 58: 297–321. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02038859>

GAIVORONSKI, A.A., STELLA, F. (2000). Stochastic Nonstationary Optimization for Finding Universal Portfolios. *Annals of Operations Research* 100: 165–188. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1019271201970>

GAIVORONSKI, A.A., STELLA, F. (2003). On-line portfolio selection using stochastic programming. *Journal of Economic Dynamics and Control* 27: 1013–1043.

[http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889\(02\)00053-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889(02)00053-2)

JORION, P. (2002). Enhanced Index Funds and Tracking Error Optimization. *Working paper*, University of California at Irvine.

JORION, P. (2003). Portfolio Optimization with Constraints on Tracking Error. *Financial Analysts Journal* 59: 70–82.

<http://dx.doi.org/10.2469/faj.v59.n5.2565>

ROLL, R. (1992). A Mean/Variance Analysis of Tracking Error. *The Journal of Portfolio Management* 18: 13–22. <http://dx.doi.org/10.3905/jpm.1992.701922>

<sup>3</sup> K portfoliu A o velikosti jednoho cenného papíru zde není přihlédnuto právě z důvodu velikosti báze o jednom aktivu.

<sup>4</sup> Tuto anomálii lze vysvětlit metodou větví a mezí, jež byla použita pro řešení optimalizační úlohy smíšeného celočíselného programování. K odstranění tohoto problému by musela být použita metoda úplné enumerace.



RUDOLF, M., WOLTER, H.J., ZIMMERMANN, H. (1999). A linear model for tracking error minimization. *Journal of Banking & Finance* 23: 85–103. [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4266\(98\)00076-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4266(98)00076-4)

VALECKÝ, J. (2008a). The impact of proportional transaction costs on the benchmark replication by tracking error methodology. *IMEA 2008*. Liberec: Technická univerzita.

VALECKÝ, J. (2008b). Vliv velikosti báze replikačního portfolia na replikaci benchmarku. *MEKON 2008*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava.

VALECKÝ, J. (2008c). Ověření závislosti replikace Tracking Error řízenou restrukturalizací na vybrané faktory. *Řízení a modelování finančních rizik*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava.

WALSH, D.M., WALSH, K.D., EVANS, J.P. (1998). Assessing estimation error in a tracking error variance minimization framework. *Pacific-Basin Finance Journal* 6: 175–192. [http://dx.doi.org/10.1016/S0927-538X\(98\)00005-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0927-538X(98)00005-5)

**Tabulka 7** Optimální koeficienty  $\lambda$  pro jednotlivá portfolia a výši transakčních nákladů

Transakční náklady [%]	Portfolio								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0,0	–	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
0,2	–	0,97	0,76	0,57	0,58	0,45	0,95	0,79	0,97
0,4	–	0,91	0,81	0,87	0,82	0,8	1,00	0,53	0,55
0,6	–	0,96	0,95	0,84	0,95	0,96	0,95	0,93	0,97
0,8	–	0,96	0,93	0,83	0,81	0,99	0,79	0,97	0,99
1,0	–	0,77	0,79	0,99	0,95	0,83	0,96	0,98	0,74

**Tabulka 8** Výsledné hodnoty *TE* replikace s penalizací transakčních nákladů [%]

Správa	Transakční náklady [%]	Portfolio								
		A	B	C	D	E	F	G	H	I
aktivní	0,0	1,028	0,175	0,042	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,2	1,028	0,259	0,154	0,113	0,058	0,029	0,014	0,013	0,008
	0,4	1,028	0,368	0,204	0,113	0,080	0,042	0,028	0,023	0,015
	0,6	1,028	0,392	0,234	0,133	0,083	0,056	0,040	0,035	0,021
	0,8	1,028	0,410	0,300	0,144	0,100	0,066	0,049	0,041	0,028
	1,0	1,028	0,434	0,268	0,154	0,108	0,077	0,057	0,047	0,034
pasivní	–	1,028	0,487	0,301	0,199	0,166	0,133	0,114	0,102	0,093

